第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0421-08

统计过程控制的三个基本问题*

韩 东[1]， 宗福季[2]

(1- 上海交通大学数学系，上海 200240； 2- 香港科技大学工业工程与物流管理系，香港)

摘 要: 本文围绕统计过程的监测、诊断和变点时间估计三个基本问题，首先概括地介绍了过程监测的最优控制图—累积和控制图；然后，详细介绍了如何利用多重累积和控制图对过程的异变进行统计诊断；最后简述了三种常用的变点估计方法：最大似然估计，Schwarz信息判别估计和Bayesian估计。此外，文中还列出6个亟待解决的问题。

关键词: 变点监测；统计诊断；质量管理；统计过程控制

分类号: **AMS**(2000) 62L10 **中图分类号**: O213.1; O212.3 **文献标识码**: A

1 引言

我们知道，无论一个产品的生产过程，还是一个服务系统的运行，都无不受到各种因素的干扰。统计过程控制 (Statistical Process Control, SPC) 就是应用统计分析技术对所考察的系统运行过程进行监控，科学地区分出影响过程正常运行的随机因素 (不可避免的因素) 和异常因素，进而对过程发生异常变化的时间、大小、范围，甚至原因提出警示，以便及时采取措施，消除异常，使过程处于正常的运行状态。

SPC的基本原理和方法是上世纪30年代由Shewhart博士为了有效地对生产过程中产品质量进行监测控制而提出的，至今已有70多年的历史。自创立以来，它就在工业和服务等行业得到了推广和使用。二战时期美国将其制定为战时质量管理标准，为保证军工产品的质量和及时交付起到了重要作用。战后的日本从1950-1980年在工业界广泛推广和应用SPC，使日本跃居世界产品质量和生产率的领先地位，以至于美国著名的质量管理专家Berger教授也曾说：日本成功的基石之一就是SPC[1]。从上世纪80年代起，SPC在许多工业发达国家复兴，世界很多大公司也纷纷在自己内部积极推广和应用SPC。虽然，SPC是从产品的质量监控开始的，但经过70多年实践和发展，尤其是与计算机技术的紧密结合，其原理和方法现已广泛应用于设计、销售、服务、管理等过程。

SPC的广泛应用大大促进了SPC理论研究的发展。本文将主要围绕SPC的三个基本问题：监测、诊断和变点时间估计问题，概括地介绍它们的基本概念、方法以及与我们的研究工作有关的一些新的结果，并列出若干亟待解决的问题。

2 监测问题

所谓SPC的监测问题，狭义上理解就是如何利用所获得的被监测过程的统计数据，构造控制图，使之当所监测的过程有异常变化时能迅速地报警。由于被监测过程大都是在随机因素

收稿日期: 2009-11-02. **作者简介**: 韩东 (1959年5月生)，男，博士，教授. 研究方向：随机过程及应用.
***基金项目**: 香港特区自然科学基金 (620707)；国家自然科学基金 (10531070).

影响的环境中进行，因而我们可将其看成是随机过程。既然是随机过程，当对其进行监测报警时，就可能存在误报问题。因此，监测问题的关键就变成如何构造最优的控制图，使之当所监测的随机过程有异常变化时能在很小的误报率前提下，最快地报警。用数学符号表述如下。设 $X_t, t=1,2,\cdots$，是从所监测的随机过程中得到的样本 (统计数据)，其中 X_t 表示过程在 t 时刻所处的状态。设在时刻 τ (称为变点时刻)，过程发生了异常变化，也即，过程在 τ 时刻之前服从概率分布 p_0，而在 τ 时刻之后变为分布 p_1。为了检测这一变化，我们可以利用所得到的统计数据，并对其进行加工和处理，也即，选取适当的统计量，$f_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其中 $f \triangleq f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数。进而，构造控制图

$$T(f)=\min\big\{\,n\geq 1: f_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\geq c\,\big\}, \tag{1}$$

其中 $c>0$ 是上控制界线。实际上，一个控制图就定义了一个首次报警 (过程有异常变化) 的时刻，在随机过程理论中称这个时刻为停时。显然，选取不同的统计量，就可定义不同的控制图。所谓最优控制图可定义如下。设有统计量 f^* 和按式 (1) 定义的控制图 $T(f^*)$ 满足：对任意控制图 $T(f)$，当 $E_0(T(f^*))=E_0(T(f))$ 时，有

$$E_1\big(T(f^*)\big)\leq E_1\big(T(f)\big), \tag{2}$$

我们称这样的控制图 $T(f^*)$ 为最优控制图，其中 $E_0(\cdot)$ 和 $E_1(\cdot)$ 分别表示由概率分布 p_0 和 p_1 所确定的数学期望。也就是说，在同样的平均误报时间的条件下，最优控制图 $T(f^*)$ 在所有控制图中最先报警。

在讨论何为最优控制图之前，我们先来回顾一下已提出和研究的一些控制图。自 1931 年 Shewhart[2] 提出 Shewhart 控制图以后，人们先后提出了各种各样的控制图。如，多变量过程控制图[3]，累积和 (cumulative sum, CUSUM) 控制图[4]，指数加权移动平均 (exponentially weighted moving average, EWMA) 控制图[5]，Shiryayev-Roberts 控制图[6,7]，贝叶斯统计控制图[8]，回归模型控制图[9]，Cuscore 控制图[10]，残差过程控制图[11]，广义似然比控制图[12]，轮廓控制图[13]，比例积微分控制图[14]，广义 EWMA 控制图[15]，无参数 Cuscore 控制图[16] 等等。

显然，在众多的控制图中，寻找最优控制图并非易事。当取统计量

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=j}^{n}\log\big[\,L(x_k)\,\big],$$

其中 $L(x)$ 是 p_1 关于 p_0 的 Randon-Nikodym 导函数，则按 (1) 式定义的控制图

$$T_P=\min\Big\{n\geq 1:\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=j}^{n}\log\big[\,L(X_k)\,\big]\geq c\Big\}, \tag{3}$$

就是在前面已提到的由 Page 于 1954 年提出的 CUSUM 控制图。

1971 年，Lorden[17] 首先证明了当监测样本 $\{X_k,k\geq 1\}$ 是独立同分布的随机过程时，在下述 Lorden 意义下 CUSUM 控制图是渐进最优的，若 $E_0(T_P)=E_0(T)$ 趋于无穷，则

$$\overline{E_1}(T_P)\leq\overline{E_1}(T)\triangleq\sup_{\tau\geq 1} ess\sup E^{(\tau)}\big[\,(T-\tau+1)^+\,|\,X_1,\cdots,X_{\tau-1}\,\big], \tag{4}$$

其中 T 是任意的一个控制图，而 $E^{(\tau)}(\cdot)$ 表示在 τ 时刻之后过程服从分布 p_1 所对应的数学期望。

这里需要说明的是，上述关于最优控制图的两种定义(2)和(4)式是不等价的，而且(4)式要比(2)式更难于验证。1986和1990年，Moustakides[18]和Ritov[19]先后用不同的方法证明了当$E_0(T_P)$为有限时，CUSUM控制图在Lorden意义下仍然是最优的，即，满足(4)式。最近，我们进一步证明了当监测样本$\{X_k, k \geq 1\}$是平稳的线性过程时，CUSUM控制图依然是渐近最优的[20]。那么，我们自然会问：

问题1　对于一般的随机过程，CUSUM控制图是否是最优的？

在上述最优控制图的介绍中，我们有一个很强的假设：过程发生异常变化后，其服从的概率分布p_1是已知的。实际上，当所监测的过程发生异变后，我们很难准确地知道它变化后服从什么概率分布，尤其是在线监测时更是如此。这样，我们就有问题2。

问题2　如果只知道所监测随机过程在正常运行时(在过程发生异常变化之前)所服从的概率分布，我们能否找到最优的控制图？

当然，关于随机过程的监测还有许多其它的问题，这里就不再涉及了。

3　诊断问题

这里所说的诊断是指统计诊断，它是利用被监测过程的统计数据，对过程异常变化的大小，程度，范围以及变化的方向和趋势等及时地做出统计推断。在过去的几十年，通过构造各种控制图来对所监测过程的异常变化进行诊断已有很多研究工作，这可参阅文献[21-29]。下面主要介绍我们最近两年的一个研究结果[30]，以此阐明如何通过控制图来进行诊断。

设所监测的随机过程X_t, $t = 1, 2, \cdots$，在正常情况下(在异常变化之前)服从概率分布p_{α_0}，其中p_{α_0}既可表示分布函数也可表示分布密度函数，而α_0是一个参数。假设我们根据监测对象的有关专业知识可以知道，所监测的随机过程发生异常变化后(在变点时刻τ之后)，其所有可能服从的概率分布p_α构成一个集合$\{p_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$，其中$\mathfrak{A}$是一个不含$\alpha_0$的参数集合，并且满足：当$\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}$且$\alpha \neq \alpha'$时，$p_\alpha \neq p_{\alpha'}$。上述假设意指，我们仅知道过程异常变化后其所有可能服从的概率分布为$\{p_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$，但具体服从哪一个概率分布并不知道。简记$\Gamma(\mathfrak{A}) = \{p_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$。通常集合$\Gamma(\mathfrak{A})$含有无穷多个概率分布。比如，某过程在正常情况下服从标准正态分布$N(0,1)$，即

$$p_{\alpha_0} = p_{(0,1)}(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

这里$\alpha_0 = (0,1)$，而在异常变化后它可能服从的分布为

$$\left\{p_\alpha = p_{(\mu,\sigma)}(x) : \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \mu \neq 0; 0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \sigma \neq 1\right\},$$

其中$\alpha = (\mu, \sigma)$，$\mu_1 < \mu_2$，$\sigma_1 < \sigma_2$，$p_{(\mu,\sigma)}(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$。记

$$\mathfrak{A} = \left\{(\mu, \sigma) : \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \mu \neq 0; 0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \sigma \neq 1\right\},$$

则集合$\Gamma(\mathfrak{A})$就含有无穷多个正态分布。

若过程发生异变后，我们能很快地诊断出它所服从的概率分布，这当然求之不得。但实际上，要在无穷多可能的概率分布中迅速地推断是哪一个概率分布，是非常困难的。因此，我们退而求其次，看能否通过构造多个控制图来推断过程发生异变后的概率分布属于集合$\Gamma(\mathfrak{A})$的某个小区域(子集合)。显然，区域越小，越能准确地推断过程发生异变后所服从的概率分布。基于这一想法，我们在监测过程之前，就预先在$\Gamma(\mathfrak{A})$中选取m个互不相同的元素，p_{α_k}, $1 \leq k \leq m$，并按Kullblak-Leibler信息距离将$\Gamma(\mathfrak{A})$分成m个分别

以 $p_{\alpha_k}, 1 \le k \le m$ 为“中心点”的互不相交的小区域。这里，我们称 $p_{\alpha_k}, 1 \le k \le m$ 为 m 个参考分布。两个概率分布 p_α 和 $p_{\alpha'}$ 的 Kullblak-Leibler 信息距离 $I(p_\alpha, p_{\alpha'})$ 定义如下

$$I(p_\alpha, p_{\alpha'}) = E_\alpha\Big[\log \frac{p_\alpha(X)}{p_{\alpha'}(X)}\Big],$$

其中，随机变量 X 服从概率分布 p_α，而 E_α 表示分布 p_α 所对应的数学期望。设

$$J_k = \Big\{ p_\alpha \in \Gamma(\mathfrak{A}) : I(p_\alpha, p_{\alpha_k}) \le \min_{j \ne k} I(p_\alpha, p_{\alpha_j}) \Big\}, \tag{5}$$

且令

$$\Gamma_1 = J_1, \quad \Gamma_k = J_k - J_k \cap \big(\cup_{j=1}^{k-1} J_j \big),$$

其中 $2 \le k \le m$。这样，子集合 Γ_k，$k = 1, 2, \cdots, m$，互不相交并且 $\cup_{k=1}^m \Gamma_k = \Gamma(\mathfrak{A})$。由定义 (5) 可知，若 $p_\alpha \in \Gamma_k$，则按 Kullblak-Leibler 信息距离 p_α 等于或靠近 p_{α_k}。

对于取定的 $p_{\alpha_k}, 1 \le k \le m$，我们可构造由 m 个 CUSUM 控制图所形成的 m 重 CUSUM 控制图 T_{mC}，其定义如下

$$T_{mC} = \min_{1 \le k \le m} \{T(\alpha_k, c_k)\},$$

其中

$$T(\alpha_k, c_k) = \min\Big\{ n : \max_{1 \le j \le n} \sum_{t=j}^{n} Z_t^{(k)} > c_k \Big\}, \quad Z_t^{(k)} = \log\Big[\frac{p_{\alpha_k}(X(t))}{p_{\alpha_0}(X(t))} \Big],$$

$c_k > 0,\ 1 \le k \le m$ 是 m 个上控制线。下面我们就利用这个多重 CUSUM 控制图 T_{mC} 对过程的异变进行诊断。为此，我们先给出多重控制图的诊断能力的定义。

设 $\mathbb{P}$ 是一个二维的概率侧度，它可表示为

$$\mathbb{P}(A \times A') = \int_A Q(\mathrm{d}\alpha) P_\alpha(A'), \quad A \in \mathcal{A}, \quad A' \in \mathcal{F},$$

其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是集合 $\mathfrak{A}$ 和集合 Ω 的 σ- 域，Q 是定义在 $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$ 上的一个概率测度，$(\Omega, \mathcal{F})$ 是随机过程的概率空间，而 P_α 是由 p_α 所确定的概率测度。令 $\mathfrak{A}_k = \{\alpha : p_\alpha \in \Gamma_k\}$，$1 \le k \le m$。一个 m 重控制图 T_m 的诊断能力，$DC(T_m)$，定义如下

$$DC(T_m) = \min_{1 \le k \le m} \big\{ \mathbb{P}\big(p_\alpha \in \Gamma_k \,|\, T_m = T(\alpha_k, c_k)\big) \big\}, \tag{6}$$

其中

$$\mathbb{P}\big(p_\alpha \in \Gamma_k \,|\, T_m = T(\alpha_k, c_k)\big) = \frac{\int_{\mathfrak{A}_k} Q(\mathrm{d}\alpha) P_\alpha(T_m = T(\alpha_k, c_k))}{\int_{\mathfrak{A}} Q(\mathrm{d}\alpha) P_\alpha(T_m = T(\alpha_k, c_k))}.$$

由此定义，当 $DC(T_m) = 1$ 时，等价于 $\mathbb{P}\big(p_\omega \in \Gamma_k | T_m = T(\omega_k, c_k)\big) = 1,\ 1 \le k \le m$，而这意味着一旦 $T_m = T(\omega_k, c_k)$，即 $T(\omega_k, c_k)$ 首先发出过程变化的警示，则必有 p_α 属于 Γ_k，也就是说过程变化后的概率分布或为 p_{α_k} 或者与 p_{α_k} 很靠近。

在文献 [30] 中，我们证明了当 $L = E_{\alpha_0}(T(\alpha_k, c_k))\ (1 \le k \le m)$ 趋于无穷时，多重 CUSUM 控制图 T_{mC} 的诊断能力趋于 1，即 $\lim\limits_{L \to \infty} DC(T_{mC}) = 1$。这表明多重 CUSUM 控制图的诊断能力可以渐进达到最大值。自然，我们会进一步问：

问题3 多重CUSUM控制图T_{mC}的诊断能力是否是最优的？即是否有$DC(T_{mC}) = \max_{T_m}\{DC(T_m)\}$?

根据多重控制图诊断能力的定义我们知道，诊断能力不仅与如何构造控制图有关，而且还与选取什么样的参考分布，选多少参考分布以及参考分布在空间$\Gamma(\mathfrak{A})$中所处的位置都有密切的关系。一般来说，参考分布越多诊断的精确性越高，但误判率也随之增加。因此，问题的关键是：

问题4 建立什么标准来取舍参考分布？

4 变点时间估计问题

监测一个随机过程，除了要尽可能快地知晓它是否发生了异常变化以及异常变化的大小、程度和范围，还需要及时地推断过程是在什么时间发生异常变化的。因为，知道了过程发生异常变化的时间，将有助于我们找到过程发生异变的原因。因此，利用被监测过程的统计数据对过程发生异常变化的时间进行统计估计和分析—称之为变点时间估计，也是SPC的一个重要问题。有关这个问题的最新研究进展，可参阅文献[31-33]。这里我们着重介绍变点时间估计的三种常用的方法，参见文献[34,35]。

4.1 最大似然估计

设相互独立的随机过程$\{X_t : t = 1,2,\cdots\}$在变点时间τ之前服从概率分布(或概率密度)$p_0 = p(x;\alpha_0)$，而在τ时刻之后变为分布$p_1 = p(x;\alpha_1)$，其中α_0和α_1是两个参数。当$1 \le \tau \le n-1$时，$(X_1,\cdots,X_n)$的联合概率分布(或概率密度)为

$$L(\alpha_0,\alpha_1) = \prod_{k=1}^{\tau} p(x_k;\alpha_0) \prod_{k=\tau+1}^{n} p(x_k;\alpha_1).$$

若α_0和α_1已知，则变点时间τ的最大似然估计$\widehat{\tau}_n$可表示为

$$\widehat{\tau}_n = \arg\max_{1\le i\le n-1}\Big[\sum_{k=1}^{i}\log p\,(X_k;\alpha_0) + \sum_{k=i+1}^{n}\log p\,(X_k;\alpha_1)\Big],$$

其中arg表示使得方括号中的数值达到最大所对应的i。若α_0和α_1未知，令$\widehat{\alpha}_{0i}$和$\widehat{\alpha}_{1i}$分别为在$\tau = i$的条件下关于α_0和α_1的最大似然估计，则变点时间τ的最大似然估计$\widehat{\tau}_n$可写为

$$\widehat{\tau}_n = \arg\max_{1\le i\le n-1}\Big[\sum_{k=1}^{i}\log p\,(X_k;\widehat{\alpha}_{0i}) + \sum_{k=i+1}^{n}\log p\,(X_k;\widehat{\alpha}_{1i})\Big].$$

4.2 Schwarz信息判别(SIC)估计

设$L(\widehat{\alpha}_{0i},\widehat{\alpha}_{1i})$表示在$\tau = i$的条件下关于$\alpha_0$和$\alpha_1$的最大似然函数，则Schwarz信息判别统计量为

$$\mathrm{SIC}(i) = -2\log L(\widehat{\alpha}_{0i},\widehat{\alpha}_{1i}) + 2\log n.$$

特别当$p_0 = p(x;\alpha_0)$和$p_1 = p(x;\alpha_1)$分别是正态分布$N(\mu,\alpha_0^2)$和$N(\mu,\alpha_1^2)$的密度函数时，SIC(i)可写为

$$\mathrm{SIC}(i) = n\log 2\pi + i\log\widehat{\alpha}_{0i}^2 + (n-i)\log\widehat{\alpha}_{1i}^2 + n + 2\log n,$$

其中 μ 为已知常数

$$\widehat{\alpha}_{0i}^2=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}(X_k-\mu)^2,\quad \widehat{\alpha}_{1i}^2=\frac{1}{n-i}\sum_{k=i+1}^{n}(X_k-\mu)^2.$$

利用Schwarz信息判别统计量SIC(i)，变点时间 τ 的Schwarz信息判别估计量 $\widehat{\tau}_n$ 可表示为

$$\widehat{\tau}_n=\arg\min_{2\leq i\leq n-2}\{\mathrm{SIC}(i)\}.$$

4.3 Bayesian估计

为叙述简便，假设 $\{X_i: i=1,2,\cdots\}$ 相互独立，$X_i\sim N(\mu_i,1)$，并且 $\mu_1=\cdots=\mu_\tau\neq\mu_{\tau+1}=\cdots=\mu_n$。另设 τ，μ_n 和 $\Delta=\mu_\tau-\mu_{\tau+1}$ 为三个相互独立的随机变量，并且 $P(\tau=i)=p(i)$，$\mu_n\sim N(0,\alpha^2)$，$\Delta\sim N(0,\beta^2)$。当 α,β 充分大时，变点时间 τ 的后验分布可近似地表示为

$$P(\tau=i\,|\,X_1,\cdots,X_n)=\frac{w(i)}{\sum_{j=1}^{n-1}w(j)},$$

其中 $1\leq i\leq n-1$，

$$w(i)=\frac{p(i)\mathrm{e}^{T_i^2/2}}{\beta\sqrt{i(n-i)}},\quad T_i=\frac{(n-i)^{-1}\sum_{k=i+1}^{n}X_k-i^{-1}\sum_{k=1}^{i}X_k}{\sqrt{i^{-1}+(n-i)^{-1}}}.$$

我们知道，对于相互独立的随机过程 $\{X_t: t=1,2,\cdots\}$，其变点时间 τ 的最大似然估计 $\widehat{\tau}_n$ 具有强一致性，并且 $\widehat{\tau}_n$ 不收敛于 τ 的概率随着 n 趋于无穷是按指数衰减的(常称为概率收敛速率)。但是，一个真实地随机系统其运动过程大多是不独立的。那么，

问题5 当所监测的过程不独立时，比如它是Markov过程，其变点时间的最大似然估计 $\widehat{\tau}_n$ 是否是一致的？概率收敛速率是什么？

上述我们都是在大样本的前提下讨论随机过程的监测、诊断和变点时间的估计问题。而在线监测时，通常我们得到的统计数据都是小样本。因此，最亟待解决的问题是：

问题6 对于小样本统计数据，我们能否将过程的监测、诊断和变点时间估计3个问题统一地进行处理并得到最优的解决方案？

5 结束语

本文粗浅地介绍了SPC的三个基本问题和研究方法并附带提出了6个亟待解决的问题。实际上，关于SPC的理论研究成果非常丰富，未解决的理论问题也很多。想要详细地了解SPC的理论研究进展，可见文献[35-43]。若对SPC的应用有兴趣也可参见文献[1,44-46]。真诚地希望通过本文的介绍能有更多的人了解和认识SPC。

参考文献：

[1] 张公绪，何国伟，郑慧英. 新编质量管理学[M]. 北京：高等教育出版社，2002
Zhang G X, He G W, Zheng H Y. New Quality Management[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002
[2] Shewhart W. Economic Control of Quality of Manufactured Product[M]. Princeton: Van Nostrand, 1931
[3] Hotelling H. Multivariate quality control—illustrated by the air testing of sample bombsights[C]// Techniques of Statistical Analysis, Eisenhart C, Hastay MW, Wallis WA(eds.) McGraw-Hill, New York, 111-184

[4] Page E S. Continuous inspection schemes[J]. Biometrika, 1954, 41: 100-115

[5] Roberts S W. Control chart tests based on geometric moving averages[J]. Technometrics, 1959, 1: 239-250

[6] Shiryayev A N. On optimum methods in quickest detection problems[J]. Theory Probab Appli, 1963, 13: 22-46

[7] Roberts S W. A comparison of some control chart procedures[J]. Technometrics, 1966, 8: 411-430

[8] Cherno H, Zacks S. Estimating the current mean of a normal distribution which is subject to changes in time[J]. Ann Math Statist, 1964, 35: 999-1018

[9] Mandel B J. The regression control chart[J]. J Quality Technology, 1969, 1: 1-9

[10] Bagshaw M, Johnson R A. Sequential procedures for detecting parameter changes in a time-series model[J]. J of Amer Statist Assoc, 1977, 72: 593-597

[11] Alwan L C, Roberts H V. Time-series modeling for statistical process control[J]. Journal of Business Economic Statistics, 1988, 6: 87-95

[12] Siegmund D, Venkatraman E S. Using the generalized likelihood ratio statistic for sequential detection of a change-point[J]. Ann Statist, 1995, 23: 255-271

[13] Kang L, Albin S L. On-line monitoring when the process yields a linear profile[J]. J Quality Technology, 2000, 32: 418-426

[14] Jiang W, *et al.* Proportional integral derivative charts for process monitoring[J]. Technometrics, 2002, 44: 205-214

[15] Han D, Tsung F. A generalized EWMA control chart and its comparison with the optimal EWMA, CUSUM and GLR schemes[J]. Ann Statist, 2004, 32: 316-339

[16] Han D, Tsung F. A reference-free cuscore chart for dynamic mean change detection and a unified framework for charting performance comparison[J]. J Amer Statist Assoc, 2006, 101: 368-386

[17] Lorden G. Procedures for reacting to a change in distribution[J]. Ann of Math Statist, 1971, 42: 1897-1908

[18] Moustakides G V. Optimal stopping times for detecting changes in distribution[J]. Ann Statist, 1986, 14: 1379-1387

[19] Ritov Y. Decision theoretic optimality of the CUSUM procedure[J]. Ann Statist, 1990, 18: 1464-1469

[20] Han D, Tsung F. Run length properties of the CUSUM and EWMA schemes for a stationary linear process[J]. Statistica Sinica, 2009, 19: 473-490

[21] Lorden G, Eisenberger I. Detection of failure rate increases[J]. Technometrics, 1973, 15: 167-175

[22] Willsky A S, Jones H L. A generalized likelihood ratio approach to detection and estimation of jumps in linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976, 21: 108-112

[23] Dragalin V. The optimality of generalized CUSUM procedure in quickest detection problem[C]// Proceedings of Steklov Institute of Mathematics: Statistics and Control of Stochastic Processes, 1993, 202: 132-148

[24] Dragalin V. The design and analysis of 2-CUSUM procedure[J]. Communication in Statistics-Simulation & Computation, 1997, 26: 67-81

[25] Leger R P, Garland Wm J, Poehlman W F S. Fault detection and diagnosis using statistical control charts and artificial neural networks[J]. Artificial Intelligence in Engineering, 1998, 12: 35-47

[26] Lai T L, Shan J Z. Efficient recursive algorithms for detection for abrupt changes in signals and control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44: 952-966

[27] Sparks R S. CUSUM charts for signalling varying location shifts[J]. J of Quality Technology, 2000, 32: 157-171

[28] Nikiforov I. A suboptimal quadratic change detection scheme[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46: 2095-2107

[29] Kalagonda A A, Kulkarni S R. Diagnosis of multivariate control chart signal based on dummy variable regression technique[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2003, 32: 1665-1684

[30] Han D, Tsung F. Detection and diagnosis of unknown abrupt changes using CUSUM multi-chart schemes[J]. Sequential Analysis, 2007, 26: 225-249

[31] Goldenshluger A, Tsybakov A, Zeevi A. Optimal change-point estimation from indirect observations[J]. Ann Statist, 2006, 34: 350-372

[32] Lan Y, Banerjee M, Michailidis G. Change-point estimation under adaptive sampling[J]. Ann Statist, 2009, 37: 1752-1791

[33] Aue A, Gabrys R, Horvath L, *et al.* Estimation of change-point in mean function of functional data[J]. J

Multivariate Analysis, 2009, 100: 2254-2269
[34] Bhattacharya P K. Some aspects of change-point analysis[C]// Change-point Problems, Carlstein, E, Muller, H and Siegmund, D (eds.) Hayward, CA: Inst Math Statist, 1994, 23: 28-56
[35] Chen J, Gupta A k. Parametric Statistical Change Point Analysis[M]. Boston: Birkhauser, 2000
[36] Lai T L. Sequential change-point detection in quality control and dynamic systems[J]. Journal of Royal Statistical Society, Series B, 1995, 57: 613-658
[37] Lai T L. Sequential analysis: some classical problems and new challenges[J]. Statistica Sinica, 2001, 11: 303-408
[38] Stoumbos Z G, Reynolds M R, Ryan T P, *et al.* The state of statistical process control as we proceed into the 21st century[J]. J of Amer Statist Assoc, 2000, 95: 992-998
[39] Tsung F, Wang K. Charting techniques for dynamic processes: literature review and extensions[C]// Proceedings of the International Conference on Design of Experiments and its Applications, Tianjin, China, 2006
[40] 王兆军. 关于单变量统计过程控制图某些研究结果简介[J]. 统计与信息论坛, 2006, 21(3): 5-9
Wang Z J. Brief introduction of some results on control charts for univariate statistical processes[J]. *Statistics and Information Forum*, 2006, 21(3): 5-9
[41] Bersimis S, Psarakis S, Panaretos J. Multivariate statistical process control charts: an overview[J]. Qual Reliab Engng Int, 2007, 23: 517-543
[42] Basseville B, Nikiforov I V. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993
[43] Lenz H J, Wilrich P T. Frontiers in Statistical Quality Control[M]. New York: Physica-Verlag Heidelberg, 2006
[44] Kenett R S, Zacks S. Modern Industrial Statistics: Design and Control of Quality and Reliability[M]. Belmont: Duxbury Press, 1998
[45] 孙静. 接近零不合格过程的质量控制[M]. 北京：清华大学出版社，2001
Sun J. Quality Control of the Nearly Zero-Nonconformity Processes[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001
[46] Montgomery D C. Statistical Quality Control[M]. 6th ed Singapore: John Wiley Inc, 2009

Three Basic Problems in Statistic Process Control

HAN Dong[1], TSUNG Fu-gee[2]

(1- Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240;
2- Department of Industrial Engineering and Logistics Management, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong)

Abstract: Based on the three basic concepts: detection, diagnosis and change-point estimation in the statistic process control, we first introduce the optimal control chart, the CUSUM control chart, in detecting the distribution change of a process, then describe how to make a statistic diagnosis by using the CUSUM multi-chart scheme, and finally investigate three ways of estimating the change-point: maximum likelihood, Schwarz information criterion and Bayesian approach. Moreover, six unsolved problems of detection, diagnosis and change-point estimation are proposed in the paper.

Keywords: change point detection; statistic diagnosis; quality management; statistical process control

Received: 02 Nov 2009. **Accepted:** 25 Nov 2009.
Foundation item: The Research Grant Council of Hong Kong (620707); the National Natural Science Foundation of China (10531070).